素粒子論におけるStandard Modelの世代構造とC-P violation

著者	小沢 和浩, 古尾谷 泉
出版者	法政大学多摩研究報告編集委員会
雑誌名	法政大学多摩研究報告
巻	34
ページ	27-32
発行年	2019-10-30
URL	http://doi.org/10.15002/00022523

素粒子論における Standard Model の世代構造と C-P violation

小沢和浩[1]・古尾谷　泉[2]

Generation structure and C-P violation in the standard model in the elementary particle physics

Kazuhiro OZAWA and Izumi FURUOYA

素粒子論では、物質を構成している基本粒子 fermion は以下の lepton と quark とから成る。また、これらの粒子は SU（2）× U（1）群により分類される。

$$\begin{vmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} u_L \\ d_L' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_L \\ s_L' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} t_L \\ b_L' \end{vmatrix},$$

$$e_R,\ \mu_R,\ \tau_R \qquad u_R,\ d_R',\ c_R,\ s_R',\ t_R,\ b_R',$$

ここで、d_R'，s_R'，b_R' は　弱い相互作用における固有状態である。

この論文では、5 次元時空内に warped space を設定し、この空間で standard model の世代構造を解析し、我々の宇宙空間を予測する。

我々の model space すなわち warped space における Dirac Equation は（see Appendix）

$$(ie^{(ky)}(\gamma^0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i) + ir^5(\partial_y - 2k) - M)\,\Phi(x^0 x^i y) = 0, \tag{1}$$

ここで、$i = 1, 2, 3$ である。

曲率 k は小さいとして、共変微分内の k は無視する。さらに、変数分離を行う、すなわち、

$$\Phi(x^0 x^i y) = \Phi(x^0 x^i)\ \ \Phi(y) \tag{2}$$

と置いて Eq.（1）に代入すれば

$$(i(\gamma^0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i) - m)\ \ \Phi(x^0 x^i) = 0, \tag{3}$$

$$(i\gamma^5 \partial_y - M + me^{(ky)})\ \ \Phi(y) = 0, \tag{4}$$

となる。ここで、m は中間状態である。

Eq.（4）の解、波動関数は、y 軸上の 2 点を O および P とすれば

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\ O\ \_\_\_\_\_\_\_\_\ P\ \_\_\_\_\_\_\_\_\ y$$

$$\Phi(P) = \Phi(O)\ \ e^{(-M(P-0))}\ \ \exp((m/k)(e^{(kP)} - e^{(kO)})), \tag{5}$$

1）法政大学経済学部
2）法政大学経済学部

となる。

曲率 k が複素数であれば、 y 軸上に sin curve 様の波形が現れるが、これが potential の役割りをして外から入ってきた質量 m の粒子はこの potential の底で安定した一番大きな energy をもつことになる、ここでは、この状態の粒子の質量を “physical” mass と呼ぶことにしよう。また、potential を複素数で表したのは、この粒子が我々の住んでる宇宙に吸収されることを意味している、と考えよう。これは、原子核反応理論における optical model からの類推である。

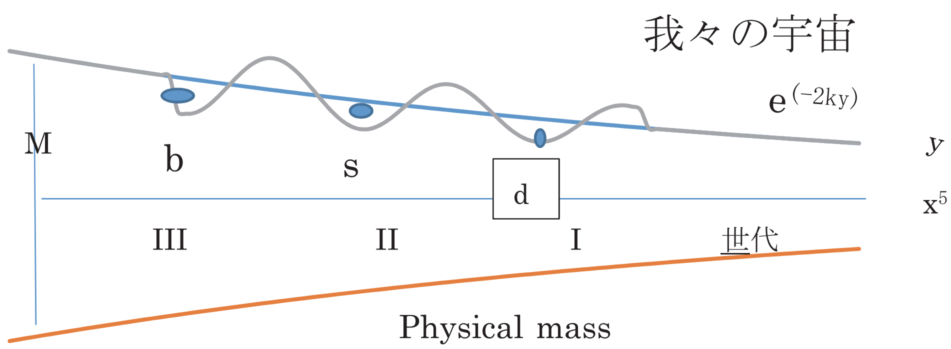

Fig.1

各　potential の幅（一波長）を $\left({}^{2\pi}\!/\!_{k}\right)$ とする。 y 軸上で、この幅で、分割して、右から I, II および III 世代とする。

i 番目の世代の “physical” mass を m_i, $i=1,2,3$ であらわす。これらの質量は potential $m(y)$ および $m(y)$ の実部を最小にする条件

$$m(y) = \mathrm{Re}(M\Phi^{+}e^{(-ky)}\Phi) \quad と \quad \partial_y m = 0 \quad および \quad \partial_y{}^2 m_y < 0 \tag{6}$$

から

$$m_i = |\,m(y_i)\,| \tag{7}$$

で求められる。

これらの各世代内での波動関数は

$$\Phi(P_i) = \Phi(O_i)\ e^{(-M(Pi-Oi))}\exp((m_i/k)(e^{(kPi)} - e^{(kOi)})),\ i = 1,\ 2,\ 3. \tag{8}$$

となる。

ここで、各世代内の波動関数は、世代によらない “同じもの” であること示そう。

Proof:　このことは、例えば、II 世代から 2π だけ図形を右に移動すれば、I 世代の図形と重なることを示せば十分であろう。II 世代の波動関数は

$$\Phi(P_2) = \Phi(O_2)\ e^{(-M(P_2-O_2))}\exp((m_2/k)(e^{(kP_2)} - e^{(kO_2)})) \tag{9}$$

である。ここで、領域 II から I へ図形を移せば、すなわち、

$$P_2 = P_1 - 2\pi \quad および \quad O_2 = O_1 - 2\pi \tag{10}$$

を Eq.（9）に代入すれば

$$\Phi(P_1-2\pi)=\Phi(O_1-2\pi)\ \ e^{(-M(P_1-O_1))}\exp\left((m_2/k)(e^{(kP_1)}-e^{(kO_1)})e^{-(2\pi k)}\right). \tag{11}$$

となるが、Fig.2 の下部に書かれている議論から

$$m_1=m_2\ \ e^{-2\pi k}, \tag{12}$$

であるから Eq.（10）は

$$\Phi'(P_1)=\Phi'(O_1)\ \ e^{(-M(P_1-O_1))}\exp\left((m_1/k)(e^{(kP_1)}-e^{(kO_1)})\right), \tag{13}$$

となる。Eq.（13）は I 世代での fermion の波動関数そのものである。

Eq.（12）が成立すことは、以下の実験事実からわる。ここでは、このことを down quark を例として、示そう。Fig. 2、で、d, s, b 粒子の質量の値を semi-log 方眼紙上に plot すると、良い近似で直線上に乗ることがわかる。他の種世代でも同様のことが言えて、各世代の 質量を m_1, m_2, m_3, とすると

$$m_1=m_2\ \ e^{(-2\pi k)}=m_3\ \ e^{(-4\pi k)}, \tag{14}$$

が成立するのである。

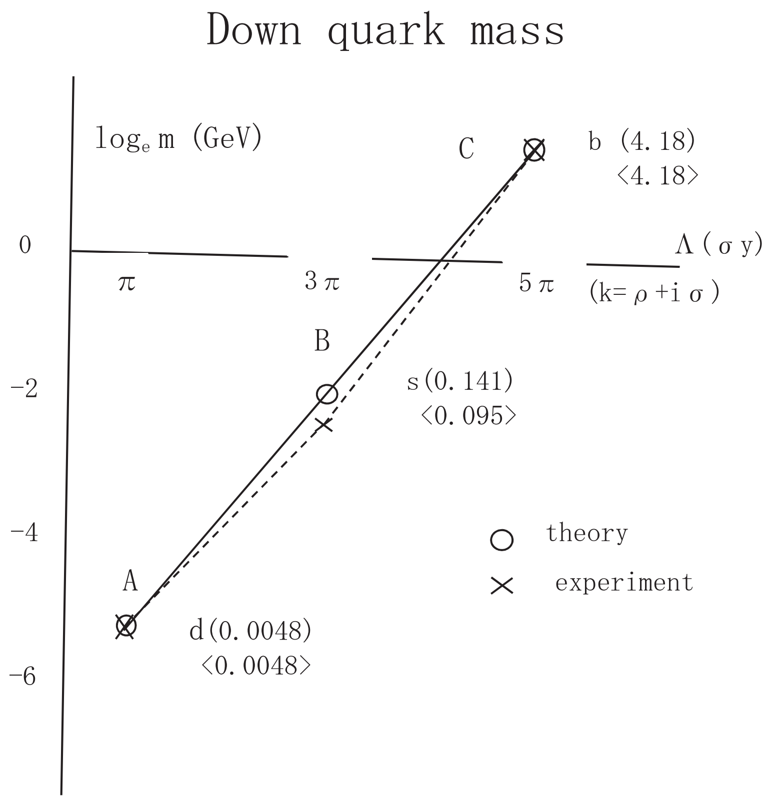

Fig.2.

m_s is estimated from m_d and m_b by the formula ; $m_s=\sqrt{m_d m_b}$.

$m_s^2=m_d m_b$, の両辺の対数をとり変形すると $\log(m_b/m_s)=\log(m_s/m_d)$ となるが、これを$2\pi k$とおけば

$$m_d=m_s\ \ e^{(-2\pi k)}=m_b\ \ e^{(-4\pi k)}$$

を得る。

ここでの結論は、世代 I, II および III は、互いに、座礁変換のみを通して、dynamical な event によってではない、移りうることを示している。

C-P violation

従来の 4－dim 理論で $\gamma-$ matrix の表現

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{および} \quad \gamma^i = \begin{vmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{vmatrix},\ i = 1,\ 2,\ 3, \tag{15}$$

を用いると massless の Dirac 方程式は

$$(E-(\sigma P))\,u = 0, \tag{16}$$

$$(E+(\sigma P))\,v = 0. \tag{17}$$

と書ける。ここで、 u は positive helicity の粒子、または、negative helicity の反粒子を表す。一方、 v は negative helicity の粒子、または、positive helicity の反粒子を表す。Eq.（16）と Eq.（17）とは互いに、独立な式なので、もし、運動の方程式が空間反転のもとで不変ならば、$u \neq 0$, $v = 0$ の解も、$u = 0$, $v \neq 0$ の解も存在しなければならない。しかし、ニユートリノの現象などから、space reflection での不変性は破られていることがわかっている。自然はどうも $u = 0$, $v \neq 0$ の解のみを好み、 $u \neq 0$, $v = 0$ の解は必要ではないらしい。

我々の warped model でこのことを調べよう。我々の空間は 5 次元なので、$\gamma-$ matrix を、新たに、一つ導入しなければならない。そして、それを γ^5 と書けば、以下の anti-commutation relation を満たさなければならない。

$$\{\gamma^\alpha \gamma^\beta\} = \eta^{\alpha\beta},\ \alpha,\ \beta = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \ \text{and} \ 5.$$

ここで、 $(\eta^{\alpha\beta}) = (1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1)$ である。 (18)

このような $\gamma-$ matrix としては $\gamma^5 = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0$. が存在するが、しかし、この式を直接用いるわけにはいかない。何故ならば、q^0 が energy であるためには γ^5 は anti-hermitian でなければならないからである。したがって、$\gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0$ とおく。Eq.（15）の表示を用いると

$$\gamma^5 = \begin{vmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{vmatrix}, \tag{19}$$

となる。

Eq.（15）と Eq.（19）を用いて、Eq.（4）から

$$\begin{aligned} &(i\gamma^5\,\partial_y - M + e^{(ky)}m)\ \Phi(y) \\ &= \begin{vmatrix} -\partial_y-(M-e^{(ky)}m) & 0 \\ 0 & \partial_y-(M-e^{(ky)}m) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Phi_1(y) \\ \Phi_2(y) \end{vmatrix}, \quad \text{ここで} \quad \Phi = \begin{vmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

すなわち

$$(\partial_y + (M-e^{(ky)}m))\ \Phi_1(y) = 0, \tag{20}$$

$$(\partial_y - (M-e^{(ky)}m))\ \Phi_2(y) = 0. \tag{21}$$

となる。

$M > e^{(ky)} m$, だから、y が無限大になると、$\Phi_2(y)$ は無限大となり、Eq.（21）には物理的な意味がない。このEq.（21）は、従来の 4 次元理論における Eq.（16）に対応している。したがって、粒子に質量がなければ、$u \neq 0$ で $v = 0$ の解は存在しないはずである。しかし、helicity は相対理論的な概念ではない。したがって、粒子に質量があれば、両 helicity の状態が、混ざり合うことになる、と考えられる。

Appendix

Warped space における Fermion の方程式の Lagrangean は

$$L = \sqrt{g}\,(i\overline{\Phi}\,\Gamma^{A} D_A \Phi - M\,\overline{\Phi}\,\Phi),\ A = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \quad \text{および} \quad y. \tag{A-1}$$

である。$\overline{\Phi}$ について L の変分をとれば

$$(i\Gamma^{A} D_A - M)\,\Phi(x) = 0, \tag{A-2}$$

をうる。Γ^A は curved space における$\gamma-$ matrix であり、以下の、反交換関係をみたさなければならない

$$\{\Gamma^A \Gamma^B\} = 2g^{AB},\ A,\ B = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \quad \text{および} \quad 5 \tag{A-3}$$

ここで、(g^{AB}) は、我々の model space における contravariant metric tensor である、また、Γ^A は平坦な $\gamma^A -$ matrix とは、以下の関係があり

$$\Gamma^{\lambda} = e^{(ky)}\,\gamma^{\lambda},\ \lambda = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \text{ and }\ \Gamma^5 = \gamma^5 \tag{4-A}$$

また、(γ^A) は、以下の関係を満たさなければならない

$$\{\gamma^A \gamma^B\} = 2\eta^{AB},\ A,\ B = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \text{ and }\ 5 \tag{A-5}$$

ここで (η^{AB}) は five dimensional Minkowsky space における metric tensor で、signature は $(+----)$ である。

我々の Model space における covariant derivatives は

$$\begin{aligned} D_0 &= \partial_0 + (A'/4A)\,\Gamma_0 \Gamma^5 = \partial_0 - (k/2)\,e^{(-ky)}\gamma_0\gamma^5 \\ D_i &= \partial_i + (A'/4A)\,\Gamma_i \Gamma^5 = \partial_{I-(k/2)}\,e^{(-k/2)}\gamma_i\gamma^5,\ i = 1,\ 2,\ 3. \\ D_y &= \partial_y, \quad \text{ここで} \quad A(y) = e^{(-2ky)}. \end{aligned} \tag{A-6}$$

である。

Eq.（A-4）と Eq.（A-6）とを Eq.（A-2）に代入すれば

$$(ie^{(ky)}(\gamma^0 \partial_0 + \gamma^i \partial_i) + i\gamma^5(\partial_y - 2k) - M)\ \Phi(x^0 x^i y) = 0. \tag{A-7}$$

となる。Eq.（A-7）は warped space における Dirac Equation である。

変数分離；$\Phi(x^0 x^i y) = \Phi(x^0 x^i)\,\Phi(y)$ とおいて、これを Eq.（A-7）に代入すれば以下になる

$$i\,(\gamma^0\,\partial_0 + \gamma^i\,\partial_i)\,\Phi(x^0 x^i)/\Phi(x^0 x^i) = (-)\,e^{(-ky)}(i\gamma^5(\partial_y - 2k) - M)\,\Phi(y)/\Phi(y) = m. \tag{A-8}$$

ここで、m は intermediate state である。

Eq（A-8）から

$$(i\,(\gamma^0\,\partial_0 + \gamma^i\,\partial_i) - m)\,\Phi(x^0 x^i) = 0, \tag{A-9}$$

$$(e^{(-ky)}(i\gamma^5(\partial_y - 2k) - M) + m)\,\Phi(y) = 0. \tag{A-10}$$

をえる。

以後、以下の具体的な $\gamma-$ matrices の表現を用いる

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{vmatrix} \qquad \gamma^i = \begin{vmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{vmatrix} \qquad \gamma^5 = \begin{vmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{vmatrix}, \tag{A-11}$$

これらの γ^0，γ^i，$i = 1，2，3$，および γ^5 は、以下の anti-commutation relation を満たさなければならない

$$\{\gamma^A \gamma^B\} = 2\eta^{AB},\ A，B = 0，1，2，3 \text{ and } 5.$$

ここで、$\eta^{AB} = (1，-1，-1，-1，-1)$ である。

ここで、γ^5 には二通りの表示があるが

$$\gamma^5 = +(-)\begin{vmatrix} iI & 0 \\ 0 & -iI \end{vmatrix} \tag{A-12}$$

q^0 が energy であるためには、プラスの表示を採用する。Eq.（A-11）をつかって Eq.（A-10）は

$$\begin{aligned}&(i\gamma^5\,\partial_y - M + e^{(ky)}m)\,\Phi(y)\\ &= \begin{vmatrix} -\partial y - (M - e^{(ky)}m) & 0 \\ 0 & \partial_y - (M - e^{(ky)}m) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \phi_1(y) \\ \phi_2(y) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ここで} \quad \Phi = \begin{vmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

すなわち

$$(\partial_y + (M - e^{(ky)}m)\ \ \phi_1(y) = 0, \tag{A-13}$$

$$(\partial_y - (M - e^{(ky)}m)\ \ \phi_2(y) = 0. \tag{A-14}$$

となる。Eq.（A-13）は容易にとけて

$$\partial_y \log\phi_1(y) = (-M + e^{(ky)}m). \tag{A-15}$$

となる。y 軸上の 2 点を O と P とすると、Eq.（A-15）を O から P まで積分すれば

$$\Phi(P) = \Phi(0)\ \ e^{(-M(P-0))}\ \ \exp((m/k)(e^{(kP)} - e^{(kO)}). \tag{A-16}$$

となる。